

Тема 8 Изгиб

Основные понятия

Деформация прямого изгиба возникает в том случае, когда на стержень действует поперечная нагрузка, расположенная в одной плоскости (силовой плоскости), проходящей через ось симметрии сечения (рис. 8.1, а). В этой же плоскости располагается изогнутая ось стержня (упругая линия) – рис. 8.1, б. Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*.

При деформации прямого изгиба в поперечном сечении балки возникают два внутренних силовых фактора (рис. 8.1, в): поперечная сила Q_y , где y – ось симметрии (главная центральная ось), и действующий в силовой плоскости изгибающий момент M_x , где x – другая главная центральная ось сечения, нормальная к оси симметрии.

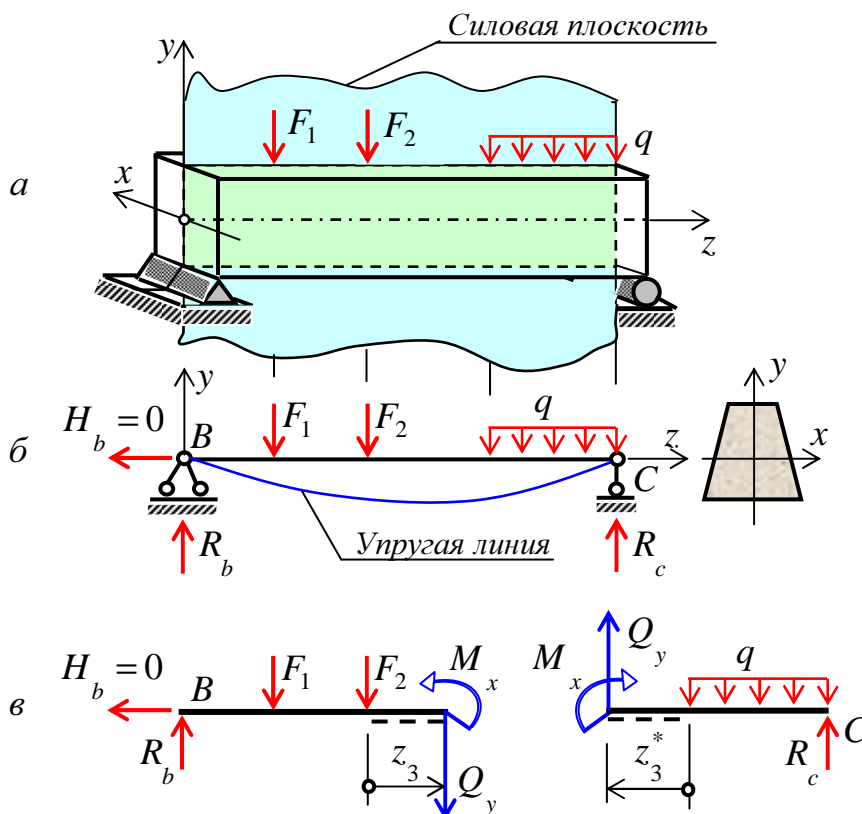


Рис. 8.1

Вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса действует только изгибающий момент, называется *чистым изгибом*.

Деформация изгиба является наиболее распространенной при расчете элементов конструкций. Балки широко используются как несущие элементы в строительных и машиностроительных конструкциях.

Правило знаков для M_x и Q_y

Изгибающий момент M_x в поперечном сечении балки считается *положительным*, когда на левом торце правой отсеченной части балки он направлен по часовой стрелке, а на правом торце левой отсеченной части – против часовой стрелки (рис. 8.1, в). При таком направлении момента растягиваются (удлиняются) нижние волокна балки, помеченные пунктирной линией, а верхние волокна сжаты (укорачиваются).

Поперечная сила Q_y в поперечном сечении балки *положительна*, когда на левом торце правой отсеченной части балки она направлена снизу вверх, а на правом торце левой отсеченной части – сверху вниз (рис. 8.1, в). Положительная поперечная сила стремится вращать выделенную часть балки по часовой стрелке относительно любой точки, расположенной внутри выделенной части балки.

Определение M_x и Q_y методом сечений

На основании метода сечений поперечная сила и изгибающий момент в сечении балки могут быть определены через внешние силы, действующие на отсеченную часть балки с использованием соответствующих уравнений равновесия.

Изгибающий момент M_x , действующий в поперечном сечении балки, по величине равен сумме моментов всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части бруса, относительно центральной оси x этого сечения:

$$M_x = \sum_{\text{лев}} M_{\text{внешн}} = \sum_{\text{прав}} M_{\text{внешн}} .$$

Если внешняя сила в данном сечении растягивает нижние волокна балки, то момент этой силы в этом сечении считается положительным, если растягиваются верхние волокна балки, то момент этой силы будет отрицательным.

Поперечная сила Q_y в сечении бруса, по величине равна сумме проекций всех внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса, на ось перпендикулярную оси бруса (ось y):

$$Q_y = \sum_{\text{лев}} F_y^{\text{внешн}} = \sum_{\text{прав}} F_y^{\text{внешн}} .$$

Если данная внешняя сила вращает выделенную часть балки относительно центра тяжести рассматриваемого сечения по часовой стрелке, то она учитывается со знаком плюс, если против часовой стрелки, то со знаком минус.

Дифференциальные зависимости при изгибе

Двумя бесконечно близкими сечениями выделим элемент балки длиной dz с распределенной нагрузкой (рис. 8.2) и рассмотрим его равновесие.

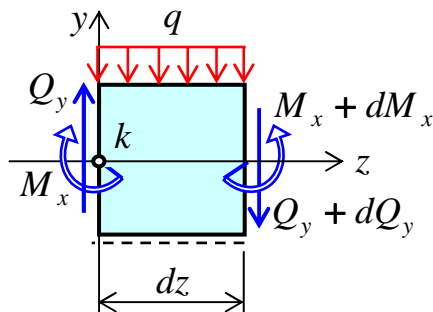


Рис. 8.2

$$\sum M_k = 0 \text{ или } M_x + q \cdot dz \cdot dz/2 + (Q_y + dQ_y) \cdot dz - (M_x + dM_x) = 0.$$

Откуда, пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка малости, получим $Q_y = \frac{dM_x}{dz}$.

Первая производная от изгибающего момента по абсциссе z равна поперечной силе.

$$\sum F_y = 0 \text{ или } Q_y - q \cdot dz - (Q_y + dQ_y) = 0, \text{ отсюда } q = -\frac{dQ_y}{dz}.$$

Полученные дифференциальные зависимости широко используются при проверке правильности построения эпюр внутренних сил при изгибе. Так первая дифференциальная зависимость позволяет определять на участке балки сечения с наибольшим по модулю значением изгибающего момента. Если в сечении балки поперечная сила равна нулю, то функция момента в этом сечении имеет экстремум (максимум или минимум по знаку деформации).

Построение эпюр M_x и Q_y при изгибе

Эюра внутренней силы – график, показывающий изменение этой силы по длине балки.

Для построения эпюр балка разбивается на участки, в пределах которых функция внутренней силы не меняет своего аналитического выражения. За границы участков принимаются сечения, в которых приложены внешние нагрузки: сосредоточенные силы, сосредоточенные моменты, начинается или заканчивается распределенная нагрузка одного направления и изменяющаяся по одному закону, а также начало и конец балки.

Последовательно на каждом участке вводится скользящая система координатных осей (начало координат совмещается с началом участка) и для произвольного сечения составляются выражения для определения

поперечной силы и изгибающего момента. Затем по этим выражениям в пределах каждого участка строятся графики (эпюры) внутренних сил.

Рассмотрим несколько характерных примеров построения эпюр внутренних сил при изгибе.

Пример 1. Рассмотрим консоль – балку, жестко заделанную одним концом, свободную на другом конце и нагруженную силой F (рис. 8.3, а). Для построения эпюр имеем один участок.

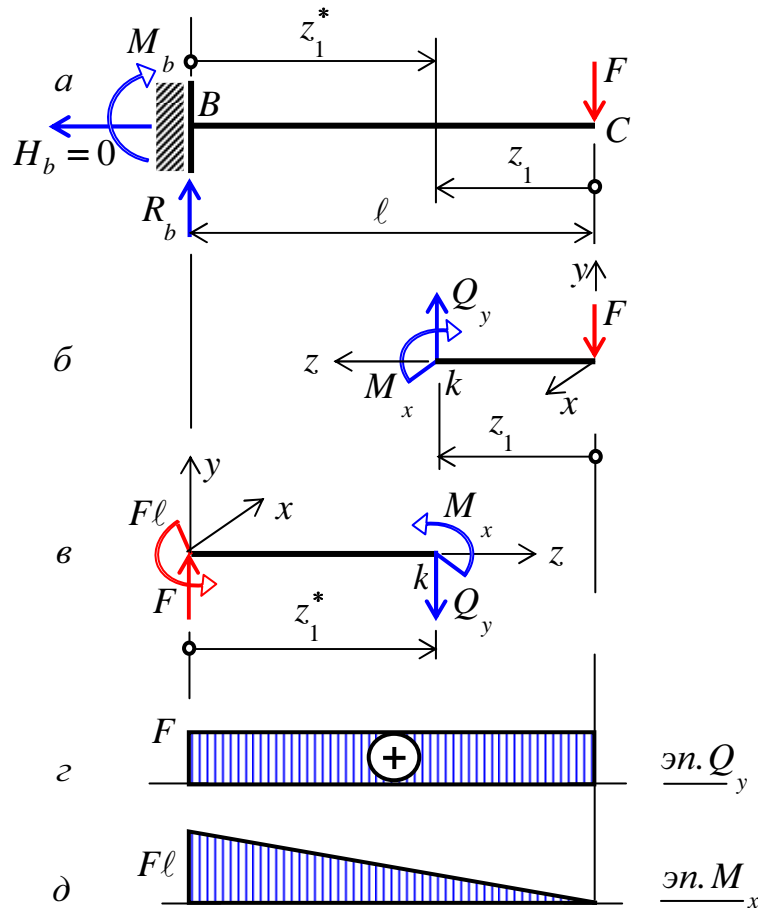


Рис. 8.3

После мысленного рассечения участка балки нормальным сечением удобнее рассмотреть равновесие правой отсеченной части (рис. 8.3, б). В этом случае не придется определять реакции в заделке, да и сил, приложенных к оставленной части, меньше – будут проще выражения для Q_y и M_x .

Начало координат совмещаем с правым концевым сечением балки ($0 \leq z_1 \leq l$). Тогда, из уравнений равновесия получим $\sum F_y = 0$, $Q_y - F = 0$,

$Q_y = F$, аналогично для M_x имеем $\sum M_k = 0$, $M_x + F \cdot z_1 = 0$,

$$M_x(z_1) = -F \cdot z_1$$

Можно сразу определить Q_y по формуле $Q_y = \sum_{\text{прав}} F_y^{\text{внешн}} = F$. Знак плюс у Q_y появился потому что сила F вращает правую часть балки относительно центра тяжести сечения « k » по часовой стрелке и поэтому положительна.

Аналогично $M_x(z_1) = \sum_{\text{прав}} M_{\text{внешн}} = -F \cdot z_1$. Для определения знака M_x в сечении « k » мысленно вводим заделку (рис. 8.4, а). Видно, что сила F растягивает в сечении « k » верхние волокна, что соответствует отрицательному изгибающему моменту.

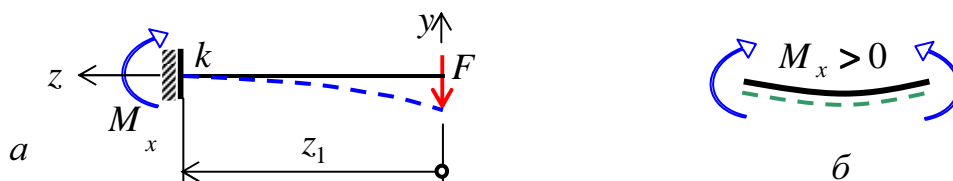


Рис. 8.4

При построении *эн. Q_y* положительные ординаты откладываем вверх, а отрицательные вниз. Обязательно по концам участка указываем значения ординат и на эпюре в кружке ставим знак (рис. 8.3, г).

Выражение для M_x – уравнение прямой линии. Для ее построения определим значения изгибающего момента в начале и конце участка:

$$M_x(z_1 = 0) = 0, \quad M_x(z_1 = \ell) = -F \cdot \ell.$$

По этим значениям строим *эн. M_x* (рис. 8.3, д). Отрицательные значения моментов откладываем вверх, со стороны растянутых волокон. Знак на эпюре не ставим, так как направление момента уже определено. Если растянуты нижние волокна, то момент будет положителен (рис. 8.4, б). Таким образом, принято правило построения *эн. M_x* на растянутых волокнах.

Те же результаты получим, если рассмотрим равновесие левой части балки (рис. 8.3, в), предварительно определив реакции в жесткой заделке (рис. 8.3, а).

$$\sum F_y = 0, \quad R_b - F = 0, \quad R_b = F, \quad \sum M_b = 0, \quad M_b + F \cdot \ell = 0, \quad M_b = -F \cdot \ell.$$

Знак минус у реактивного момента M_b означает, что действительное его направление противоположное, поэтому изменяем его на действительное и в дальнейших расчетах знак минус не учитываем (рис. 8.3, в). Делаем проверку реакций – $\sum M_c = 0, \quad R_b \cdot \ell - M_b = 0, \quad F \cdot \ell - F \cdot \ell = 0, \quad 0 = 0$.

Выражения для Q_y и M_x принимают следующий вид:

$$Q_y = \sum_{\text{лев}} F_y^{\text{внешн}} = R_b = F, \quad M_x(z_1^*) = \sum_{\text{лев}} M_{\text{внешн}} = R_b \cdot z_1^* - M_b = F \cdot z_1^* - F \cdot \ell,$$

$$M_x(z_1^* = 0) = -F \cdot \ell, \quad M_x(z_1^* = \ell) = 0.$$

Таким образом, на участке поперечная сила положительная и постоянная, а внутренний изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Отметим скачки (разрывы функции первого рода) на *эн. Q_y* в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы на величину этих сил, и на *эн. M_x* в тех сечениях, где приложены сосредоточенные моменты на величину этих моментов.

Сечение в жесткой заделке является наиболее опасным в данной расчетной схеме ($M_x^{\text{max}} = F \cdot \ell$).

Пример 2. Рассмотрим балку, шарнирно опертую по концам и нагруженную силой F в пролете (рис. 8.5, а). Для построения эпюр имеем два участка.

При действии вертикальной нагрузки в шарнирно неподвижной опоре «В» горизонтальная составляющая опорной реакции равна нулю (рис. 8.5, а). Начнем расчет с определения опорных реакций:

$$\sum M_c = 0, \quad R_b \cdot \ell - F \cdot b = 0, \quad \text{откуда } R_b = F \cdot b / \ell,$$

$$\sum M_b = 0, \quad R_c \cdot \ell - F \cdot a = 0, \quad \text{откуда } R_c = F \cdot a / \ell.$$

Обязательно должна быть выполнена проверка найденных реакций:

$$\sum F_y = 0, \quad R_b + R_c - F = 0, \quad F \cdot b / \ell + F \cdot a / \ell - F = 0, \quad F(a + b) / \ell - F = 0, \\ 0 = 0, \quad \text{реакции найдены верно.}$$

Для упрощения вычислений на первом (левом) участке будем идти слева, начало участка полагая на опоре «В» (рис. 8.5, б), на втором (правом) участке будем идти справа, начало участка полагая на опоре «С» (рис. 8.5, в).

Участок № 1, ($0 \leq z_1 \leq a$).

$$Q_y = R_b = F \cdot b / \ell, \quad M_x(z_1) = R_b \cdot z_1 = F \cdot b \cdot z_1 / \ell, \quad M_x(0) = 0, \quad M_x(a) = F \cdot a \cdot b / \ell.$$

Участок № 2, ($0 \leq z_2 \leq b$).

$$Q_y = -R_c = -F \cdot a / \ell, \quad M_x(z_2) = R_c \cdot z_2 = F \cdot a \cdot z_2 / \ell, \quad M_x(b) = F \cdot a \cdot b / \ell.$$

Эпюры для Q_y и M_x представлены соответственно на рис. 8.5, г и 8.5, д.

Отметим скачки на *эн. Q_y* в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы на величину этих сил.

Опасным в данном примере является сечение балки с $M_x^{\text{max}} = F \cdot a \cdot b / \ell$ (т. е. сечение, где приложена сосредоточенная сила F). Очевидно, что по этому сечению и произойдет разрушение балки при достаточно большой величине внешней нагрузки.

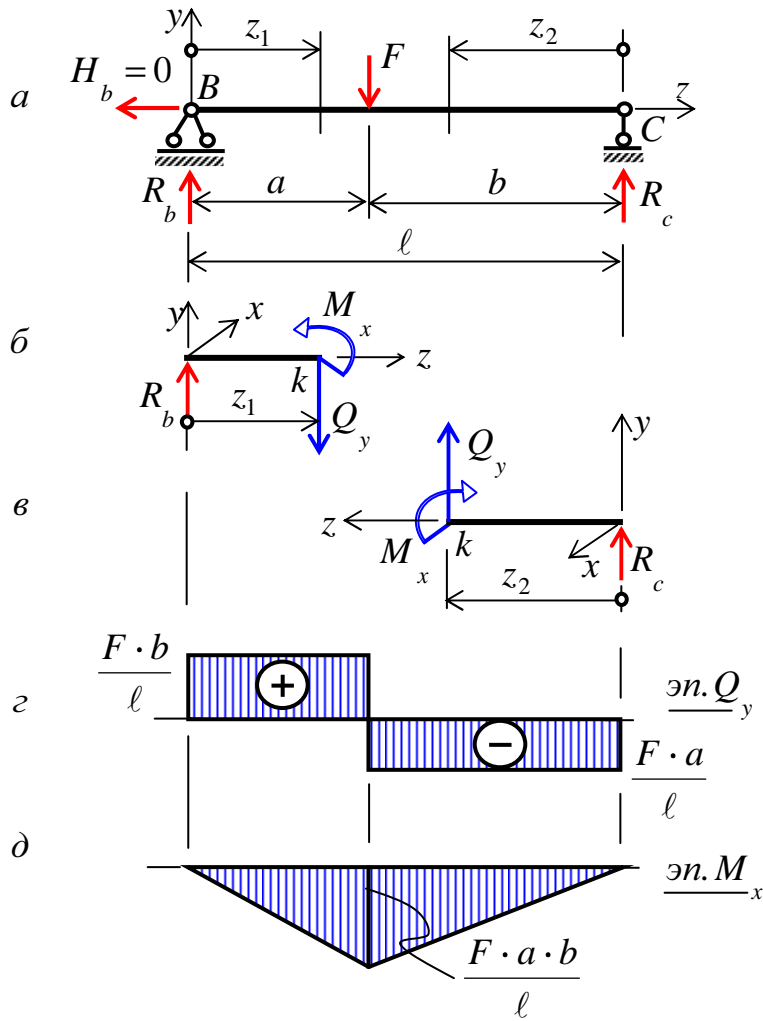


Рис. 8.5

Пример 3. Рассмотрим балку, шарнирно опертую по концам и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q в пролете (рис. 8.6, а). Для построения эпюр имеем один участок.

При действии вертикальной нагрузки в шарнирно неподвижной опоре «В» горизонтальная составляющая опорной реакции равна нулю (рис. 8.6, а). Начнем расчет с определения опорных реакций:

$$\sum M_c = 0, R_b \cdot l - q \cdot l \cdot l/2 = 0, \text{ откуда } R_b = q \cdot l/2,$$

$$\sum M_b = 0, R_c \cdot l - q \cdot l \cdot l/2 = 0, \text{ откуда } R_c = q \cdot l/2.$$

Обязательно должна быть выполнена проверка найденных реакций:

$$\sum F_y = 0, R_b + R_c - q \cdot l = 0, 0 = 0, \text{ реакции найдены верно.}$$

Начало участка совместим с опорным сечением «В» (рис. 8.6, б). Равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной z_1 равна $q \cdot z_1$ и приложена посередине участка так, что расстояние от нее до центра тяжести поперечного сечения k , будет равно $z_1/2$.

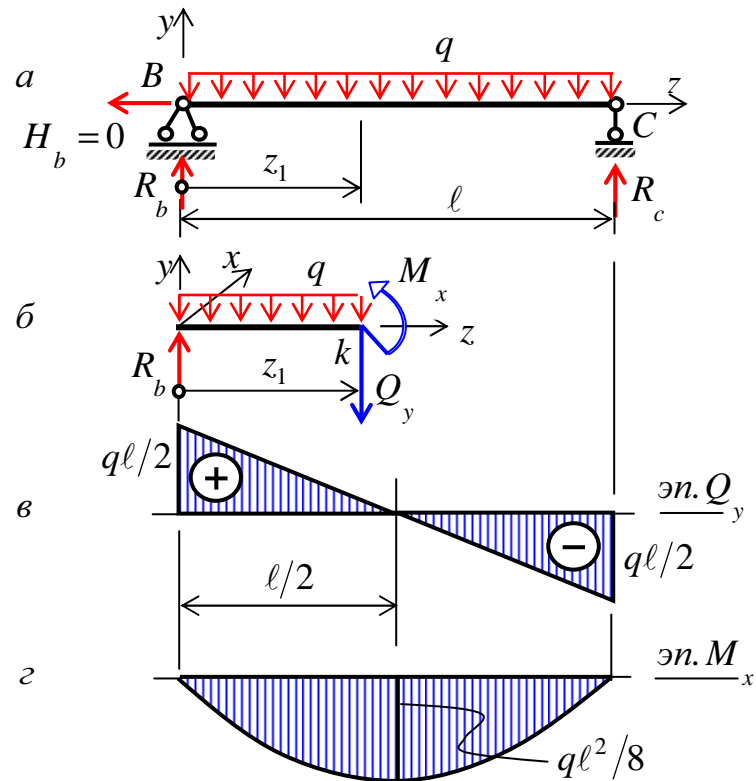


Рис. 8.6

Участок № 1, ($0 \leq z_1 \leq \ell$).

$$Q_y(z_1) = R_b - q \cdot z_1 = q \cdot \ell/2 - q \cdot z_1 .$$

Получено уравнение прямой, которую строим по значениям в начале и в конце участка: $Q_y(z_1 = 0) = q \cdot \ell/2$, $Q_y(z_1 = \ell) = -q \cdot \ell/2$ (рис. 8.6, в).

Проводя прямую замечаем, что на участке есть сечение в котором поперечная сила равна нулю. Найдем положение этого сечения, приравняв нулю выражение для поперечной силы:

$$Q_y(z_1^0) = q \cdot \ell/2 - q \cdot z_1^0 = 0, \text{ откуда } z_1^0 = \ell/2 .$$

В этом сечении, как следует из дифференциальной зависимости между M_x и Q_y , изгибающий момент имеет экстремальное значение. Следуя методике, принятой ранее, получим

$$M_x(z_1) = R_b \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot z_1/2 = q \cdot \ell \cdot z_1/2 - q \cdot z_1^2/2 .$$

Изгибающий момент меняется по закону квадратной параболы. Так будет всегда на участках с равномерно распределенной нагрузкой. Для построения эпюры определяем значение момента в трех точках:

$$M_x(z_1 = 0) = 0, \quad M_x(z_1^0 = \ell/2) = q \cdot \ell^2/8, \quad M_x(z_1 = \ell) = 0 .$$

На обоих опорах изгибающий момент отсутствует. Положительное значение момента в центре пролета откладываем вниз (растянутые волокна нижние) и проводим параболу так, чтобы в сечении с экстремальным (в

данном случае максимум) значением момента касательная к эпюре моментов была параллельна оси балки. Знак на эпюре не ставим (рис. 8.6, г).

Отметим скачки на эп. Q_y в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы на величину этих сил.

Опасным будет сечение, в котором изгибающий момент больше по величине $M_x^{\max} = q \cdot \ell^2 / 8$. Это центр пролета при $z_1^0 = \ell / 2$.

Напряжения и деформации при чистом изгибе

При чистом изгибе в поперечном сечении балки возникает только изгибающий момент M_x , а поперечная сила $Q_y = 0$. Для тех участков однородной балки, где соблюдается это условие, $M_x = const$ и, следовательно, изменение кривизны будет одним и тем же. Таким образом, упругая линия однородной балки принимает форму дуги окружности.

Для наглядного представления характера деформаций стержней при изгибе, а также для установления упрощающих предпосылок проведем следующий опыт.

На боковые поверхности модели стержня из низко модульного материала наносится сетка продольных и поперечных линий на равных расстояниях друг от друга (рис. 8.7, а).

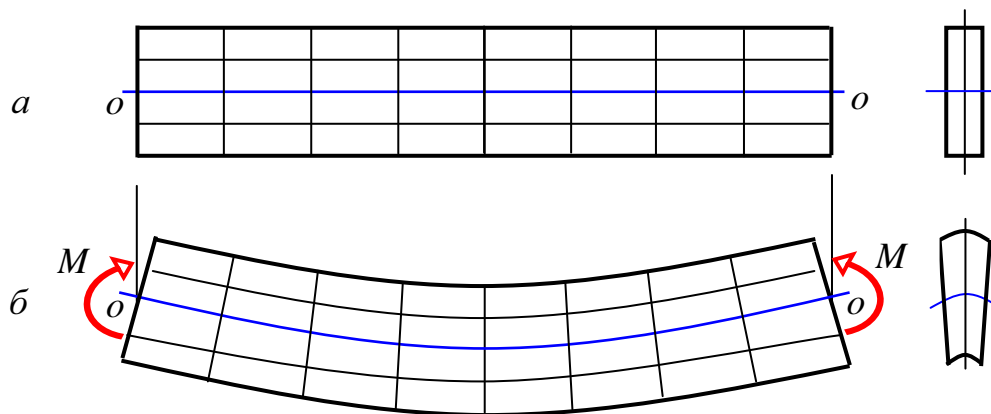


Рис. 8.7

При изгибе такого бруса двумя парами сил (M), приложенными по концам (рис. 8.7, б), можно видеть, что продольные линии искривляются по дуге окружности, причем расстояние между ними не меняется (справедлива гипотеза о ненадавливании продольных волокон – $\sigma_x = \sigma_y = 0$).

У выпуклой стороны бруса (снизу) эти волокна удлиняются, тогда как у вогнутой (сверху) – укорачиваются. Так как переход от удлинения к укорочению происходит непрерывно, то внутри бруса существует слой волокон, которые искривляются, но не меняют своей длины. Такой слой называется *нейтральным слоем*, а его след на плоскости сечения – *нейтральной (нулевой) линией* или осью (волокно $o-o$).

Деформации удлинения и укорочения обусловлены нормальными растягивающими напряжениями на выпуклой части балки, и сжимающими – на вогнутой. В нейтральном слое нормальные напряжения равны нулю ($\sigma_z = 0$).

Поперечные же линии сетки, оставаясь прямыми и перпендикулярными к искривленным продольным линиям, только поворачиваются на некоторые углы по отношению к первоначальному положению (справедлива гипотеза плоских сечений).

Ортогональность продольных и поперечных линий до и после деформирования (как отражение гипотезы плоских сечений) указывает также на отсутствие сдвигов, касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях балки.

Естественно предположить, что картина распределения деформаций, наблюдаемая на поверхности бруса, имеет место и внутри него (по ширине сечения деформации не изменяются).

Заметим, что так как волокна, лежащие выше и ниже нейтральной оси соответственно, сжимаются и растягиваются, то в этом случае наблюдается эффект Пуассона, т. е. в верхней половине поперечные размеры увеличиваются, а в нижней – уменьшаются (рис. 8.7, б).

Прежде чем приступить к определению нормальных напряжений, действующих в поперечном сечении при чистом изгибе, сформулируем основные предположения (в том числе и те, которые помог установить опыт), которыми мы будем пользоваться:

- 1) справедлив закон Гука ($\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$) для каждого продольного волокна,
 - 2) продольные волокна друг на друга не давят ($\sigma_x = \sigma_y = 0$),
 - 3) справедлива гипотеза плоских сечений,
 - 4) при чистом изгибе в поперечном сечении возникают только нормальные напряжения ($\tau = 0, \sigma_z \neq 0$),
 - 5) по ширине сечения деформации и напряжения постоянны.
- б) силовая плоскость совпадает с плоскостью симметрии yoz .

Статическая сторона задачи.

Рассмотрим условия равновесия выделенного элемента балки длиной dz , который находится в условиях чистого изгиба (рис. 8.8).

Действие левой отброшенной части представим в виде изгибающего момента M_x , который является равнодействующей нормальных напряжений (статическим эквивалентом напряжений).

Действие правой отброшенной части балки на элемент dz представим в виде элементарных сил $\sigma_z \cdot dA$ (рис. 8.8), приложенных к каждой элементарной площадке dA поперечного сечения и параллельных оси балки oz (в соответствии с предположением о наличии в поперечном сечении только нормальных напряжений).

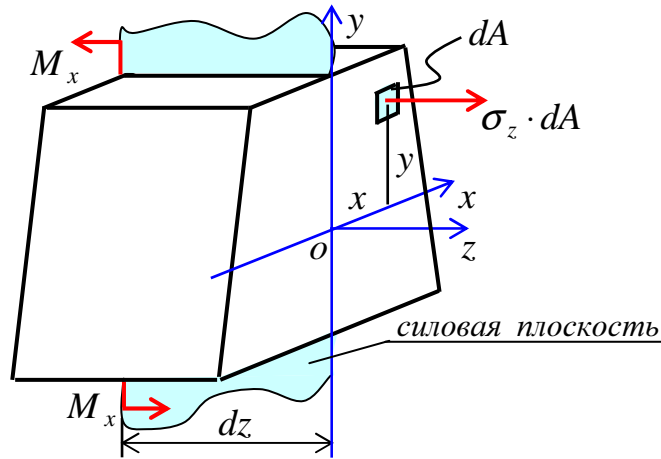


Рис. 8.8

Поскольку силовая плоскость совпадает с координатной плоскостью yoz , то из шести независимых уравнений равновесия три обращаются в тождества: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ и $\sum M_z = 0$.

Остаются

$$\sum F_z = 0, \quad \int_A \sigma_z \cdot dA = 0,$$

$$\sum M_x = 0, \quad \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA = M_x,$$

$$\sum M_y = 0, \quad \int_A \sigma_z \cdot x \cdot dA = 0.$$

Полученных интегральных зависимостей не хватает для определения напряжений, поскольку неизвестных больше чем уравнений равновесия. Поэтому для получения дополнительных уравнений необходимо рассмотреть геометрическую и физическую стороны задачи.

Геометрическая сторона задачи.

Рассмотрим вырезанный из стержня элемент длиной dz который в масштабе с искаженными в интересах наглядности пропорциями изображен на рис. 8.9.

Пусть его крайние поперечные сечения под действием под действием момента M_x симметрично повернутся на угол $d\alpha/2$. Причем продолжение сторон этих поперечных сечений пересекутся в точке o , которая является *центром кривизны* продольных волокон элемента dz . В нашем случае верхние волокна окажутся растянутыми, а нижние – сжатыми. Волокна некоторого промежуточного слоя $m-n$, перпендикулярные к плоскости действия изгибающего момента, сохраняют свою длину и называются нейтральными ($\sigma_z = 0$), как мы отмечали ранее.

Ввиду малости $d\alpha$ считаем, что точки поперечного сечения при повороте на этот угол перемещаются не по дугам, а по соответствующим касательным.

Здесь $\rho = om = on$ – радиус кривизны нейтрального волокна $m-n$ (изогнутой оси балки).

При чистом изгибе это постоянная величина и волокна изгибаются по дугам окружности этого радиуса. Очевидно, что $dz = BC = mn = \rho \cdot d\alpha$. Величина обратная радиусу кривизны называется кривизной нейтральной оси балки и определяется так $\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{dz}$.

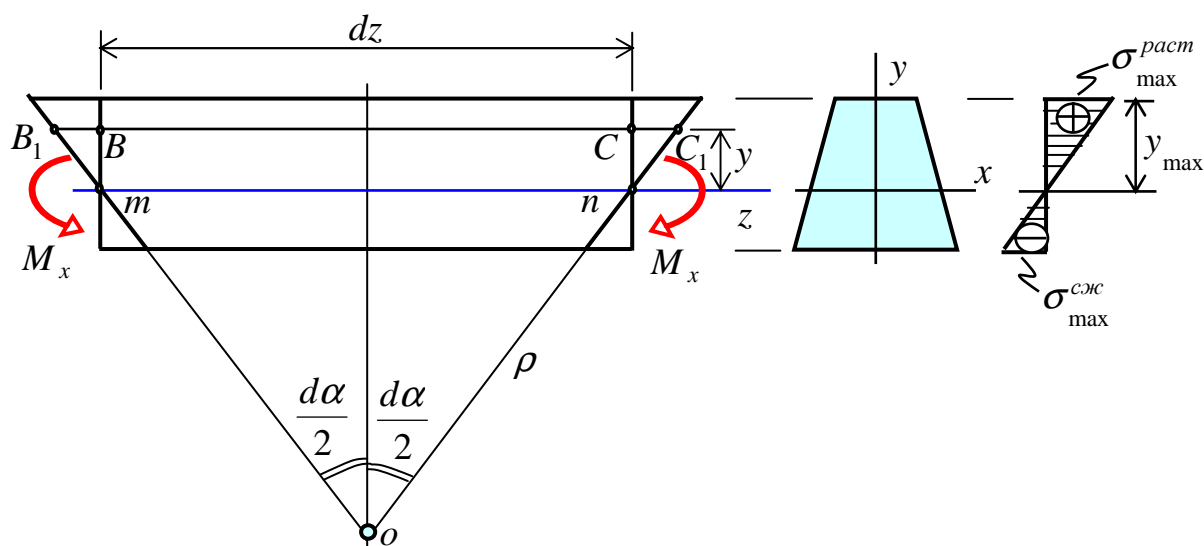


Рис. 8.9

Рассмотрим относительную деформацию волокна BC , находящегося на расстоянии y от нейтрального волокна $m-n$:

$$\varepsilon_z = \frac{B_1C_1 - BC}{BC} = \frac{(\rho + y) \cdot d\alpha - \rho \cdot d\alpha}{\rho \cdot d\alpha} = \frac{y}{\rho}.$$

Отсюда видно, что удлинение волокон балки по высоте сечения прямо пропорциональны расстоянию от нейтрального волокна.

Полученное выражение и есть искомое геометрическое уравнение. Оно отражает условие совместности деформаций волокон, расположенных на расстоянии y от нейтральной оси. Оно позволяет определить относительную линейную деформацию любого волокна при изгибе.

Физическая сторона задачи.

Связать между собой статические и геометрическое уравнения поможет закон Гука, на основании которого

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z.$$

Синтез.

Итак, после рассмотрения трех сторон задачи, мы получили следующую совместную систему из пяти уравнений (три статические, одно геометрическое и одно физическое), решая которую получаем все необхо-

димые формулы для определения положения нулевого слоя, напряжений и деформаций, геометрических характеристик, которые соответствуют деформации чистого изгиба.

Нормальное напряжение, растягивающее волокно ВС, с учетом закона Гука будет равно $\sigma_z = E \cdot \frac{y}{\rho}$.

Эта формула не пригодна для практического использования, так как содержит две неизвестные: кривизну нейтрального слоя $1/\rho$ и положение нейтральной оси m , от которой отсчитывается координата y . Для определения этих неизвестных воспользуемся тремя уравнениями равновесия. Первое статическое уравнение дает

$$\int_A E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot dA = 0, \text{ отсюда } \int_A y \cdot dA = 0 \text{ или } S_x = \int_A y \cdot dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной оси. Поскольку он равен нулю, то *нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения* и т. о. является центральной.

Определимся с системой координат x, y, z , связанной с сечением. Начало координат совместим с центром тяжести сечения. Ось z направим по нормали к сечению, а ось x по нейтральной линии. Ось y перпендикулярна оси x и совпадает с осью симметрии и следовательно лежит в силовой плоскости, которая одновременно является и плоскостью изменения кривизны (рис. 8.9).

Второе уравнение равновесие дает

$$\int_A E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot y \cdot dA = M_x, \text{ или } \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = M_x \text{ или } \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}, \text{ где } I_x = \int_A y^2 \cdot dA.$$

Здесь $I_x = \int_A y^2 \cdot dA$ представляет собой осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси x , проходящей через центр тяжести сечения. Т. о. кривизна нейтрального слоя $1/\rho$ является мерой деформации балки и она ($1/\rho$) тем меньше, чем больше величина $E \cdot I_x$, называемая *жесткостью поперечного сечения при изгибе* (по аналогии с жесткостью поперечного сечения при растяжении – $E \cdot A$).

Подставив значение $1/\rho$ в формулу для напряжений получим

$$\sigma_z = E \cdot \frac{y}{\rho} = E \cdot y \cdot \frac{M_x}{E \cdot I_x} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y.$$

Таким образом, нормальные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону. Причем, наибольшие растягивающие или наибольшие сжимающие напряжения возникают в точках, *наиболее удаленных от нейтральной оси* и расположенных по обе стороны от нее (рис. 8.9).

Заметим, что в полученную формулу для напряжений следует подставлять абсолютные значения изгибающего момента M_x и ординаты y . Знак же напряжений всегда легко устанавливается по знаку момента M_x или по характеру деформации балки.

И наконец

$$\int_A E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot x \cdot dA = 0, \text{ отсюда } \int_A y \cdot x \cdot dA = 0 \text{ или } I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = 0.$$

Интеграл представляет центробежный момент инерции площади сечения относительно осей x и y и он равен нулю. Следовательно, оси x и y – *главные центральные оси инерции* этого сечения (действительно, ось y является осью симметрии поперечного сечения балки, а ось x – центральной).

Формула, определяющая нормальное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения балки, применима при условии, что плоскость действия изгибающего момента M_x (которая совпадает с силовой плоскостью) проходит через ось симметрии сечения y (которая одновременно является и главной центральной).

При этом другая главная центральная ось x – перпендикулярна к плоскости действия изгибающего момента и является нейтральной осью поперечного сечения.

При чистом изгибе ($M_x = const$) балки постоянного сечения ($E \cdot I_x = const$) радиус кривизны ρ изогнутой оси балки имеет постоянное значение, т. е. *балка изгибается по дуге окружности*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x} = const, \text{ с учетом } \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{dz} \text{ имеем } d\alpha = \frac{M_x \cdot dz}{E \cdot I_x}.$$

Таким образом, концевые сечения такой балки длиной ℓ повернутся относительно друг друга на угол $\alpha = \frac{M_x \cdot \ell}{E \cdot I_x}$ (рис. 8.9).

Условие прочности

По условию прочности наибольшие нормальные напряжения не должны превышать соответствующих допускаемых напряжений:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \text{ или } \frac{M_x^{\max}}{I_x} \cdot y_{\max} \leq [\sigma], \text{ вводя } W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \text{ получим } \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Здесь W_x – осевой момент сопротивления сечения при изгибе (зависит только от размеров и формы поперечного сечения); y_{\max} – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения (рис. 8.9); $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение, задаваемое нормами проектирования и зависящее от материала балки, M_x^{\max} – максимальное значение изгибающего момента (легко определяемое по его эпюре).

Записанное выше условие прочности справедливо для балок из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию.

Как это принято при расчетах на прочность в сопротивлении материалов, должно соблюдаться следующее неравенство, позволяющее обеспечить экономичное расходование материала при выполнении условия прочности

$$0.95 \cdot [\sigma] \leq \sigma_{\max} \leq 1.05 \cdot [\sigma].$$

Определим осевые моменты сопротивления для прямоугольного и круглого сечений.

Для прямоугольного сечения шириной b и высотой h

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_x}{h/2} = \frac{b \cdot h^3 / 12}{h/2} = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Для круглого сечения диаметром d

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_x}{d/2} = \frac{\pi \cdot d^4 / 64}{d/2} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Если материал балок по разному сопротивляется растяжению и сжатию, то следует различать наибольшие растягивающие σ_{\max}^p и наибольшие сжимающие σ_{\max}^c напряжения, которые определяются по модулю непосредственно и сравниваются с допускаемыми. Условие прочности в этом случае будет иметь вид:

$$\sigma_{\max}^p \leq [\sigma_p], \quad \frac{M_x^{\max}}{I_x} \cdot y_{\max}^p \leq [\sigma_p], \quad \sigma_{\max}^c \leq [\sigma_c], \quad \frac{M_x^{\max}}{I_x} \cdot y_{\max}^c \leq [\sigma_c].$$

Здесь y_{\max}^p – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых волокон, y_{\max}^c – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных сжатых волокон, $[\sigma_p]$ – допускаемые напряжения на растяжение, $[\sigma_c]$ – допускаемые напряжения на сжатие.

Рациональные формы поперечных сечений при изгибе

Наиболее рациональным следует признать сечение, обладающее минимальной площадью при заданной нагрузке (изгибающем моменте) на балку и у которого получается наибольшая величина момента сопротивления W_x .

Для этого нужно, чтобы по возможности наибольший объем материала работал при напряжениях, равным допускаемым или близким к ним. Другими словами, возможно большую часть материала переместить в зоны, максимально удаленные от нейтральной оси.

Очевидно, что при этом должно удовлетворяться условие прочности растянутой и сжатой зон балки.

Таким образом, приходим к рациональному для пластичного материала сечению в форме симметричного двутавра, у которого возможно большая часть материала сосредоточена на полках, соединенных стенкой, толщина которой (δ) назначается из условий прочности стенки по касательным напряжениям, а также из соображений ее устойчивости (рис. 8.10, а).

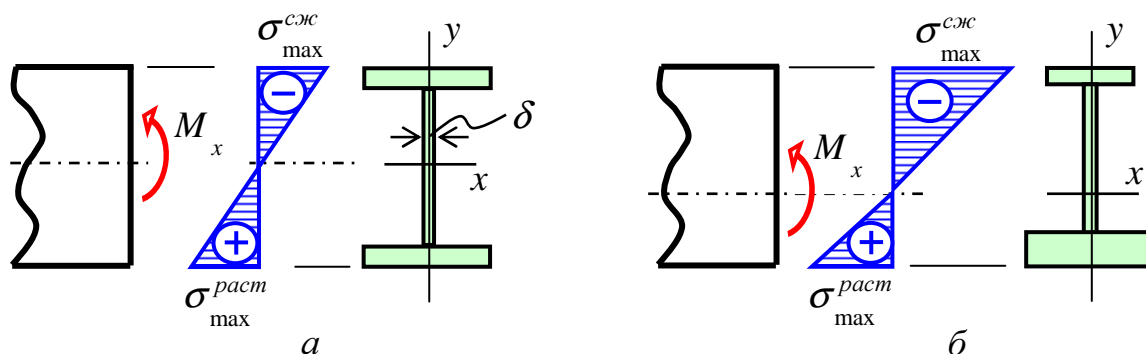


Рис 8.10

К двутавровому сечению близко по критерию рациональности так называемое коробчатое сечение (рис. 8.11, а).

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что для балок из хрупкого материала наиболее рациональным будет сечение в форме несимметричного двутавра (рис. 8.10, б).

Идея рациональности поперечного сечения балок реализована в стандартных тонкостенных профилях, получивших широкое распространение в строительстве, машиностроении, авиационном машиностроении. Широко распространены двутавр (рис. 8.11, б), швеллер (рис. 8.11, в), неравнобокий уголок (рис. 8.11, г), равнобокий уголок (рис. 8.11, д).

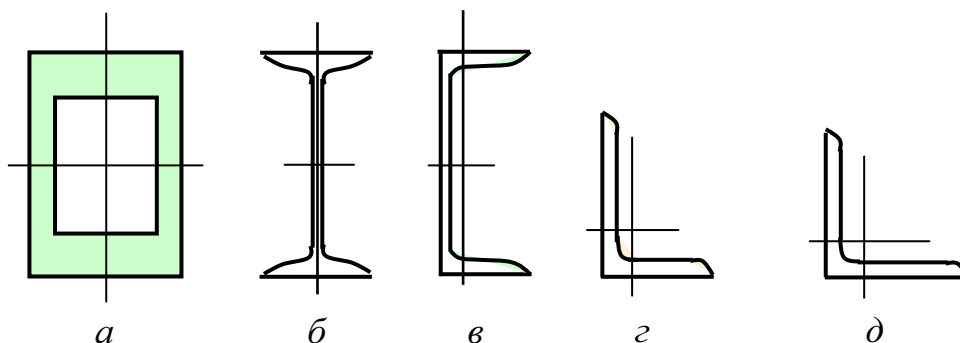


Рис. 8.11

Типы задач

При расчете на прочность элементов конструкций, работающих на изгиб, возможны три следующих вида задач, различающихся формой использования условия прочности.

Это *проверочный расчет (проверка прочности)*. В этом случае известны внешняя нагрузка, сечение стержня и его материал. Необходимо убедиться, что выполняется условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Подбор сечения (проектный расчет). По заданной нагрузке определяются размеры поперечного сечения стержня из известного материала через осевой момент сопротивления:

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]}.$$

Определение *допускаемой нагрузки*, то есть максимального значения нагрузки, которое допускает данный элемент конструкции при выполнении условия прочности

$$\max M_x \leq [\sigma] \cdot W_x.$$

Поперечный изгиб

При поперечном изгибе в сечении балки возникают изгибающий момент (M_x) и поперечная сила (Q_y). Поперечная сила представляет собой равнодействующую неравномерно распределенных по высоте поперечного сечения, лежащих в плоскости сечения касательных напряжений (τ).

В свою очередь, касательные напряжения способствуют появлению угловых деформаций γ , которые также по высоте сечения будут неравномерно распределены. Поперечные сечения не остаются плоскими, они искривляются (депланируются), т. е. гипотеза плоских сечений не выполняется.

Выясним условия, при которых влиянием депланации сечения, вызываемой поперечной силой, можно пренебречь. Для этого выясним зависимость касательных напряжений от поперечной силы и от геометрических характеристик сечения.

Все гипотезы, принятые при выводе формулы для нормальных напряжений при чистом изгибе, остаются справедливыми и в нашем случае.

Выделим из балки, которая испытывает деформацию поперечного изгиба, элемент длиной dz (рис. 8.12, а). Здесь изгибающие моменты, возникающие в левом и правом сечениях элемента, не одинаковы и отличаются на величину dM_x .

Уравнение равновесия элемента dz в виде суммы моментов действующих на него сил относительно точки k (см. рис. 8.12, а):

$$\sum M_k = 0, \quad M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \cdot dz = 0, \quad Q_y = \frac{dM_x}{dz}.$$

Таким образом, *первая производная от изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе*. Эта зависимость называется *теоремой Журавского*.

Продольным горизонтальным сечением, проведенным на расстоянии y от нейтральной оси (рис. 8.12, б), разделим элемент на две части и рассмотрим условия равновесия верхней части.

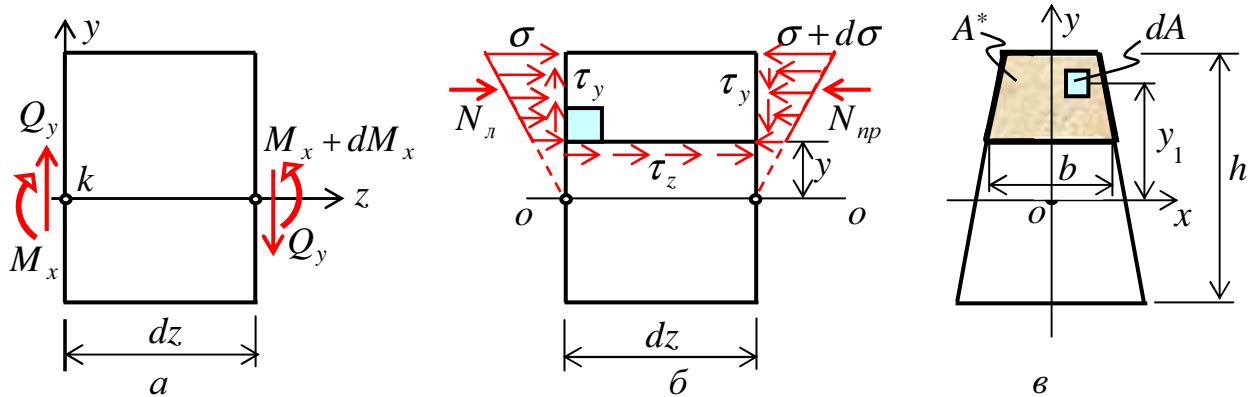


Рис. 8.12

Равнодействующая нормальных сил в левом сечении $\sigma \cdot dA$ в пределах заштрихованной площади A^* равна, очевидно,

$$N_l = \int_{A^*} \sigma \cdot dA = \int_{A^*} \frac{M_x}{I_x} \cdot y_1 \cdot dA = \frac{M_x}{I_x} \cdot \int_{A^*} y_1 \cdot dA = \frac{M_x \cdot S_x^{omc}}{I_x}.$$

Здесь через y_1 обозначена в отличие от y текущая ордината площадки dA в отсеченной части сечения и для простоты индекс z при σ не указан (рис. 8.12, в).

Полученный интеграл представляет собой статический момент относительно оси x части площади, расположенной выше продольного сечения (выше уровня y). Обозначим этот статический момент через S_x^{omc} .

В правом сечении нормальная сила будет другой

$$N_{np} = \int_{A^*} (\sigma + d\sigma) \cdot dA = \int_{A^*} \frac{(M_x + dM_x)}{I_x} \cdot y_1 \cdot dA = N_l + \frac{dM_x \cdot S_x^{omc}}{I_x}.$$

Разность этих сил $\frac{dM_x \cdot S_x^{omc}}{I_x}$ должна уравниваться касательными силами, возникающими в продольном сечении элемента $\tau_z \cdot b \cdot dz$.

В качестве первого приближения примем, что касательные напряжения распределены по ширине сечения b равномерно. Тогда

$$\frac{dM_x \cdot S_x^{omc}}{I_x} = \tau_z \cdot b \cdot dz, \text{ откуда } \tau_z = \frac{dM_x \cdot S_x^{omc}}{dz \cdot I_x \cdot b} = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b}.$$

Полученное выражение позволяет вычислить величину касательных напряжений, возникающих в продольных сечениях балки. Напряжения в поперечных сечениях (τ_y) равны им, как парные.

Таким образом, величина касательных напряжений τ в поперечных сечениях балки и в сечениях ее плоскостями, параллельными нейтральному слою, определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b},$$

где Q – поперечная сила в рассматриваемом поперечном сечении балки; S_x^{omc} – статический момент (относительно нейтральной оси) отсеченной части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от уровня, на котором определяются касательные напряжения; I_x – момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси; b – ширина поперечного сечения на том уровне, на котором определяются касательные напряжения τ . Здесь для простоты индекс y при τ и Q не указан.

Определим в качестве примера касательные напряжения в прямоугольном сечении балки, изображенном на рис. 8.13, а.

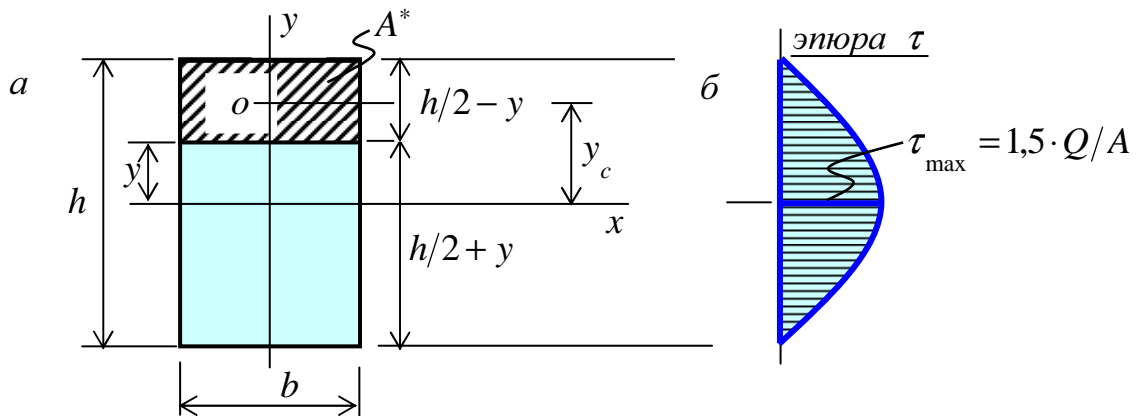


Рис. 8.13

В нашем случае $I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$, $S_x^{omc} = A^* \cdot y_c = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right)\right] =$

$$= b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right)\right] = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \text{ Тогда}$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b} = \frac{Q}{b} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \cdot \frac{12}{b \cdot h^3} = \frac{6 \cdot Q}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Из этого выражения следует, что касательные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения по закону квадратной параболы. При $y = \pm h/2$ напряжения $\tau = 0$. Наибольшие напряжения имеют в точках нейтральной оси, т. е. при $y = 0$: $\tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot b \cdot h} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot A} = 1,5 \cdot \tau_{cp}$.

При сечении любой другой формы характер изменения τ по высоте сечения будет зависеть от того, по какому закону изменится отношение S_x^{omc} / b .

Таким образом, в случае прямоугольного сечения наибольшие касательные напряжения в 1,5 раза больше среднего его значения, равного Q/A .

Эпюра касательных напряжений, показывающая их изменение по высоте сечения балки, изображена на рис. 8.13, б.

Для сопоставления абсолютных величин τ_{\max} и σ_{\max} , возникающих в поперечных сечениях балки, рассмотрим следующий пример (рис. 8.14, а).

На рис. 8.14, б, в показаны эпюры поперечных сил и изгибающих моментов соответственно.

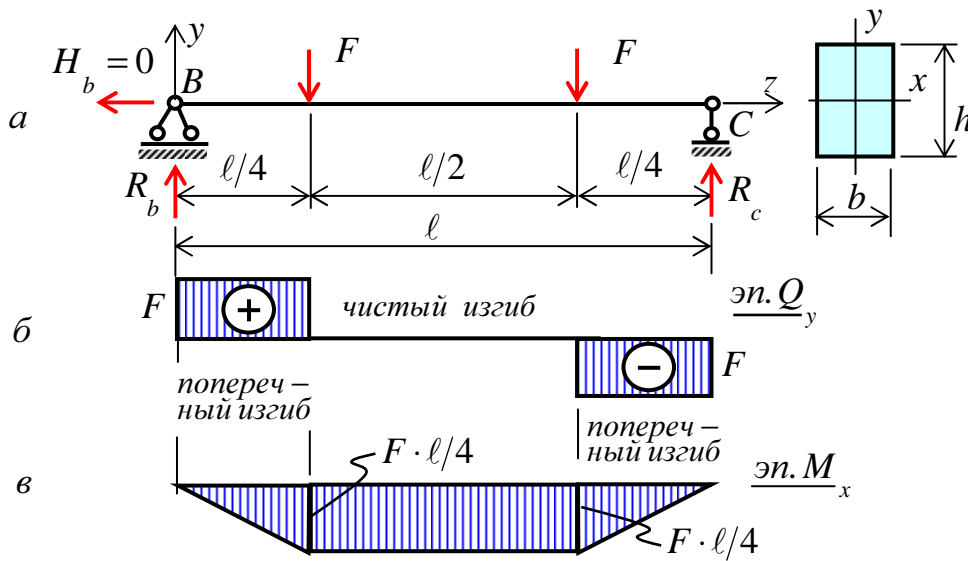


Рис. 8.14

В нашем случае максимальные нормальные напряжения будут равны $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{6}{b \cdot h^2} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{2 \cdot b \cdot h^2}$, максимальные касательные напряже-

ния — $\tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q_{\max}}{2 \cdot A} = \frac{3 \cdot Q_{\max}}{2 \cdot b \cdot h} = \frac{3 \cdot F}{2 \cdot b \cdot h}$, а их отношение дает нам

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{3 \cdot F}{2 \cdot b \cdot h} \cdot \frac{2 \cdot b \cdot h^2}{3 \cdot F \cdot l} = \frac{h}{l}.$$

Таким образом, для достаточно больших отношений $l/h \geq 10$ (длинные балки), касательные напряжения существенно меньше нормальных напряжений. Указанная порядковая оценка, за небольшими возможными исключениями, сохраняется вообще для всех нетонкостенных балок.

По этой причине расчет на прочность длинных балок при поперечном изгибе обычно производится только по нормальным напряжениям и формула $\sigma_{\max} = M_{\max} / W$ является основной формулой.

Здесь для простоты индекс x при M и W не указан.